

Simulation numérique d'un essai de surverse

Numerical simulation of overtopping experiment

S. Jeuck¹, G. Charrier¹, F. Golay², S. Bonelli¹

¹ IRSTEA, Aix-en-Provence, stephane.bonelli@irstea.fr

² Université de Toulon, IMATH, Toulon, frederic.golay@univ-tln.fr

Résumé

Nous considérons une digue en terre soumise à un écoulement de surverse. La modélisation physique et numérique d'un tel phénomène est en général un compromis entre pertinence physique, précision numérique et temps de calcul.

Nous nous sommes attachés à l'analyse de l'écoulement à surface libre caractéristique d'une surverse, édulant momentanément les phénomènes d'érosion et de transport sédimentaire qui seront inclus ultérieurement par couplage. L'hydrodynamique complexe associée à la surverse est traitée grâce à un modèle bi-fluide Eulérien à faible nombre de Mach. Ce modèle bi-fluide, non visqueux et faiblement compressible est physiquement plus pertinent que des modèles de type Saint-Venant généralement utilisés. En effet, on observe dans l'écoulement des jets et des recirculations plus facilement appréhendés par un modèle diphasique. Ce modèle est évidemment moins riche qu'un modèle de Navier-Stokes avec ou sans turbulence, mais sa formulation permet des simulations tridimensionnelles beaucoup plus économes en temps de calcul pour une représentation hydrodynamique réaliste.

En effet, la formulation hyperbolique du problème à résoudre autorise l'utilisation d'un solveur volumes finis explicite parallèle rapide. Ce solveur bénéficie d'un outil de raffinement dynamique de maillage par blocs sur critère de production numérique d'entropie, qui permet d'optimiser le nombre d'inconnues, et donc le temps de calcul, tout en augmentant la précision de la simulation dans les zones d'intérêt. Ce modèle est appliqué à l'étude de la surverse d'une digue expérimentale. Le parement aval de la digue est considéré lisse ou bien avec un profil en marches représentatif des observations expérimentales. Grâce au raffinement dynamique de maillage, l'établissement de l'écoulement est simulé rapidement. Puis, lorsque l'écoulement stationnaire est atteint, les hauteurs et champs de vitesse sont confrontés avec succès à quelques mesures expérimentales. Ces résultats sont également comparés avec des simulations réalisées avec un code commercial utilisant un modèle Navier-Stokes diphasique avec turbulence k- ω SST.

Mots-Clés

Surverse ; Simulation numérique ; Volumes finis ; Raffinement de maillage ; écoulement diphasique.

Abstract

In this paper, the overtopping of an earthen, cohesive dike is considered. Physical and numerical modelling of such phenomenon is often a compromise between physical relevance, numerical precision and computing time.

At this stage the overtopping free surface flow is modelled over a smooth or partly eroded slope. Progressive erosion and sediment transport phenomena are not addressed but shall be included later by (hydrodynamic) coupling. A bi-fluids Eulerian model at low Mach number is used to model the complex hydrodynamics of overtopping. This bi-fluid, non-viscous and almost incompressible model is physically more relevant than Saint-Venant models which are often used. Indeed, jets flows and recirculations are better dealt with by diphasic models. Obviously this model is less accurate than a Navier-Stokes model, with or without turbulence, but its formulation allows for a realistic three-dimensional representation of hydrodynamics through (computing) time-wise cheaper simulations.

Specifically, the hyperbolic formulation of the problem to solve allows the use of a fast parallel explicit finite volume solver. It benefits from dynamic mesh refinement based on numerical entropy production criteria, in order to optimize the number of unknowns, thus computing time, while increasing the accuracy in areas of interest. Thanks to the adaptive mesh refinement procedure, steady flow conditions are quicker to obtain, and height and velocity field are in good agreement with field measurements. The results are also compared to computations performed with a commercial CFD software using a diphasic Navier-Stokes model and k- ω SST turbulent model.

Key Words

Overtopping; Numerical simulation; Finite Volume; Mesh refinement; Biphasic flow.

Introduction

Nous considérons une digue en terre soumise à un écoulement de surverse. Ce phénomène, qui peut induire la ruine de la structure, est complexe à modéliser car il présente de nombreuses difficultés : écoulement à surface libre, érosion, écoulement aéré et turbulent, transport sédimentaire, rupture progressive... La modélisation physique et numérique de tels phénomènes est en général un compromis entre pertinence physique, précision numérique et temps de calcul.

Nous nous sommes attachés à l'analyse de l'écoulement à surface libre caractéristique d'une surverse, érudant momentanément les phénomènes d'érosion et de transport sédimentaire qui seront inclus ultérieurement par couplage. De nombreux travaux portent sur l'hydrodynamique de vagues submergeant une digue ou sur le développement de brèches en contexte fluvial [3, 7, 13]. Si on considère des champs de vagues non déferlantes avec une digue lisse en aval, le modèle d'écoulement en eaux peu profondes de Saint-Venant est souvent utilisé de façon pertinente [8, 12]. Dans le cas d'impacts, de vagues déferlantes ou d'écoulement complexe, un modèle diphasique de Navier-Stokes représentant l'écoulement de l'air et de l'eau est souvent plus adapté [9, 10, 14]. Quel que soit le schéma d'approximation numérique utilisé, le temps de calcul nécessaire est alors souvent très important et la simulation rarement tridimensionnelle.

Afin d'étudier le phénomène de surverse, nous utilisons les résultats expérimentaux du programme de recherche DigueELITE [2], grâce auquel nous disposons de nombreux résultats d'érosion et d'écoulement sur une digue en terre de 3,5 m de hauteur avec une pente 3H/2V.

On observe, sous l'effet de l'écoulement, de l'inhomogénéité inhérente du compactage du sol et de la cohésion du sol, que le parement de la digue est érodé en « marches d'escalier ». L'écoulement devient alors de plus en plus complexe avec des jets et recirculations qui justifient l'emploi d'un modèle bi-fluide.

Pour traiter cette hydrodynamique, nous utilisons un modèle bi-fluide Eulérien à faible nombre de Mach [5] déjà validé dans le cas de déferlements de vagues [11]. Ce modèle bi-fluide, non visqueux et faiblement compressible est physiquement plus pertinent que des modèles de type Saint-Venant, mais évidemment moins riche qu'un modèle de Navier-Stokes avec ou sans turbulence. Cependant, sa formulation permet des simulations tridimensionnelles beaucoup plus économes en temps de calcul pour une représentation hydrodynamique néanmoins réaliste.

En effet, la formulation hyperbolique du problème à résoudre autorise l'utilisation d'un solveur volumes finis explicite parallèle rapide. Ce solveur bénéficie d'un outil de raffinement dynamique de maillage par blocs sur critère de production numérique d'entropie [4, 6], qui permet d'optimiser le nombre d'inconnues et donc le temps de

calcul, tout en augmentant la précision de la simulation dans les zones d'intérêt.

Dans une première partie nous rappellerons le modèle bi-fluide à faible nombre de Mach utilisé, ainsi que le schéma numérique développé. Dans une deuxième partie, nous présenterons la simulation numérique d'un essai de surverse et confronterons les résultats aux données expérimentales disponibles, ainsi que quelques simulations réalisées avec un modèle bi-fluide Navier-Stokes turbulent d'un code de calcul commercial.

Modèle hydrodynamique

Nous décrivons ici le modèle mathématique et numérique utilisé pour décrire l'écoulement.

Modèle Eulérien à faible Mach

Un écoulement air-eau peut être modélisé par la résolution des équations de Navier-Stokes dans l'air et dans l'eau, mais cette résolution est généralement coûteuse en temps de calcul. Nous utilisons ici un modèle simplifié. Nous négligeons premièrement les phénomènes visqueux. Cette approximation, justifiée dans de nombreux cas traités en hydrodynamique, nous permet d'éviter l'approximation de l'opérateur Laplacien. Par ailleurs, nous relaxons la contrainte d'incompressibilité dans l'eau. Nous allons considérer que l'eau est faiblement compressible. Cette simplification économise des schémas numériques itératifs et surtout nous conduit à la résolution d'un système hyperbolique de lois de conservation qui sera traité par des schémas numériques performants. On considère donc un mélange d'air et d'eau, à la position \vec{x} , à l'instant t , de densité $\rho(\vec{x}, t)$, de vitesse $\vec{u}(\vec{x}, t)$, de pression $p(\vec{x}, t)$ qui satisfait aux équations d'Euler compressibles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + p \overline{\overline{I}}) = \rho \vec{g}. \quad (2)$$

Équation (1) représente la conservation de la masse dans le cas compressible, Équation (2) représente la conservation de la quantité de mouvement (\otimes produit tensoriel, $\overline{\overline{I}}$ tenseur identité, \vec{g} gravité). Dans le mélange, on définit par $\varphi(\vec{x}, t)$ la fraction d'eau. Si $\varphi = 1$ le point considéré est dans l'eau, si $\varphi = 0$ le point considéré est dans l'air. La fraction volumique φ satisfait une équation de transport écrite volontairement sous forme non conservative [5] :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varphi = 0. \quad (3)$$

Pour fermer le système, nous définissons la pression du mélange par une loi isotherme de la forme :

$$p = c_0^2 (\rho - (\phi \rho_w + (1 - \phi) \rho_A)) + p_0, \quad (4)$$

où p_0 représente une pression de référence, ρ_w la densité de l'eau, ρ_A la densité de l'air et c_0 la vitesse du son dans le mélange. Le choix d'une loi isotherme, validée précédemment [5], nous affranchit de la résolution de l'équation sur l'énergie.

Le nombre de Mach local représente le ratio de la vitesse de l'écoulement sur la vitesse du son du milieu. Pour un nombre de Mach inférieur à 0.3 l'écoulement est considéré comme quasiment incompressible. Dans notre cas, la vitesse de l'écoulement sera de l'ordre de 1 à 5 m/s. La vitesse du son est de l'ordre de 1 600 m/s dans l'eau, de l'ordre de 400 m/s dans l'air et d'après la loi de Wood de l'ordre de 23 m/s dans un mélange aéré. Considérer, dans un modèle numérique, une vitesse du son élevée contraint drastiquement le pas de temps d'un schéma explicite en temps et les schémas volumes finis ont un très mauvais comportement à très faible nombre de Mach. Pour ces raisons, nous utiliserons une vitesse du son artificielle dans le mélange de l'ordre de 20 m/s afin de satisfaire à la condition de quasi-incompressibilité.

Approximation numérique par volumes finis

Le système d'équations (1-3) constitue un système hyperbolique de lois de conservation. Nous l'approchons classiquement par un schéma volumes finis non-structurés tridimensionnel. Dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle, une seule cellule suivant la direction z est utilisée avec des conditions de symétrie. Les flux sont calculés selon le schéma de Godunov par la résolution d'un problème de Riemann aux frontières des cellules. L'utilisation du schéma MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws), avec un limiteur de pente de Barth-Jespersen, nous garantit une approximation d'ordre deux en espace. Pour la discrétisation temporelle, un schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre deux sous la condition de Courant-Friedrich-Lévy, nous évite la résolution d'un système linéaire. Par ailleurs, ce schéma explicite permet une parallélisation aisée du code de calcul. Plus de détails se trouvent dans [1,5].

Raffinement dynamique de maillage

Afin d'économiser du temps de calcul et de gagner en précision, il est pertinent de chercher à raffiner le maillage dans des « zones d'intérêt ». Les techniques de raffinement dynamique de maillage sont maintenant largement répandues. On distingue principalement une approche par octree (souvent sur maillages structurés) ou une approche par raffinement anisotrope (sur approximation par éléments finis).

Dans notre cas, afin de ne pas remailler trop souvent, nous avons opté pour une technique de raffinement par blocs.

La Figure 1 illustre la procédure de raffinement par blocs que nous avons développée. La première étape consiste à effectuer le maillage du domaine d'étude, représenté ici par

un carré par souci de simplicité, avec des cellules hexaédriques. Chacune de ces cellules représente un bloc. La deuxième étape consiste à numéroter ces blocs en utilisant une numérotation de Morton (ou Z-order) qui relie tous les centres des blocs par une courbe de Lebesgue. La troisième étape consiste à définir le nombre de cellules souhaitées dans chaque direction, ainsi qu'un niveau de raffinement nr . La définition du maillage d'un bloc est augmentée dans chaque direction d'un facteur 2^{nr} . Le nombre de cellules dans chaque bloc étant ainsi déterminé, la quatrième étape consiste, en parcourant la courbe de Lebesgue, à affecter les cellules d'un bloc à un domaine de calcul. Enfin, la dernière étape consiste à réaliser le maillage. On remarquera que le maillage est non conforme et que des cellules fictives sont créées aux interfaces entre les domaines pour permettre les communications lors de la résolution. Chaque domaine est alors affecté à un processeur pour effectuer le calcul en parallèle. Le code de calcul ainsi développé se nomme BBAMR3D (Block Based Adaptive Mesh Refinement).

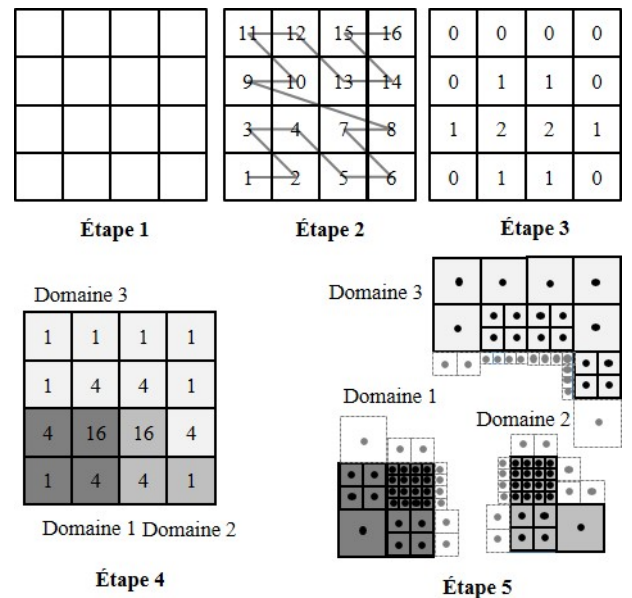


FIGURE 1 : PROCESSUS DE RAFFINEMENT PAR BLOCS

Critère de raffinement dynamique de maillage

L'intérêt d'utiliser une technique de raffinement dynamique de maillage est de pouvoir concentrer un grand nombre de cellules seulement aux endroits où cela est nécessaire. Généralement, un calcul d'erreur *a posteriori* est un excellent critère. Cette erreur *a posteriori*, liée au modèle à résoudre, est parfois difficile à déterminer. Dans notre cas, avec un système hyperbolique de lois de conservation, nous utilisons un critère lié à la production d'entropie numérique. En effet, pour tout système hyperbolique, il existe, sous certaines conditions, une entropie mathématique s et un flux d'entropie $\vec{\psi}$ satisfaisant l'inégalité de Lax. :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div}(\bar{\psi}) \leq 0. \quad (5)$$

Cette production d'entropie est nulle pour une solution régulière et infinie pour un choc. Or numériquement, on observe que cette production d'entropie est parfois non nulle ou non négligeable et est un très bon indicateur d'erreur. Pour plus de détails, on se référera à [1, 4, 6]. Dans le cas du modèle bi-fluide, nous avons utilisé :

$$s = \frac{1}{2} \rho u^2 + c_0^2 \rho \ln \rho - c_0^2 (\rho_w - \rho_A) \varphi, \quad (6)$$

$$\bar{\psi} = \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + c_0^2 \rho (\ln \rho + 1) \right) \bar{u}. \quad (7)$$

Raidissement d'interface

Les modèles air-eau sans reconstruction d'interface sont connus pour être dissipatifs, si bien que l'interface est souvent mal définie. Pour remédier en partie à cet inconvénient nous utilisons une technique de raidissement d'interface qui est décrite dans [1].

Simulation numérique d'un essai de surverse

Description de l'essai

Lors du programme de recherche DigueELITE [2], une digue grandeur réelle a été construite afin d'étudier l'influence du matériau constitutif de la digue sur l'érosion occasionnée par un écoulement de surverse. Pour plusieurs débits, les vitesses, les hauteurs d'eau et l'érosion ont été mesurées. La géométrie de la digue est décrite Figure 3.



FIGURE 2 : SURVERSE EXPERIMENTALE [2]

Comme on peut l'observer sur la Figure 2, à l'issue de l'expérience, la pente a été érodée, des marches se sont formées. En effet, la digue fut construite par compactage de couche de terre d'une hauteur de 30 cm et on retrouve ce profil après érosion. Nous effectuerons donc des simulations numériques sur pente lisse et sur une pente constituée de 11 marches qui correspondent aux couches de compactage de la digue expérimentale.

Nous utiliserons le débit maximal appliqué lors de l'expérience, soit $Q = 600$ l/s.

En tenant compte de la relation liant le débit à la hauteur critique $gh_c^3 = (Q/l)^2$ sur 1 m de largeur, nous imposons une entrée d'eau de hauteur correspondant à la hauteur critique $h_c = 0.332311$ m avec une vitesse horizontale constante $u = 1.805538$ m/s sur la crête de la digue, en A (Figure 3).

Une condition miroir est imposée sur la partie inférieure et supérieure du domaine, tandis qu'une condition de sortie est définie pour la frontière droite du domaine.

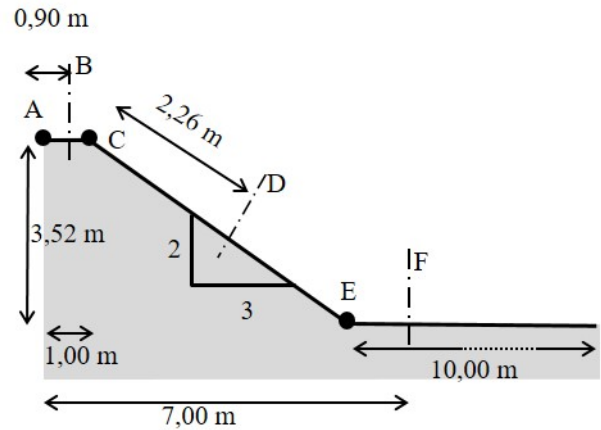


FIGURE 3 : GEOMETRIE DE LA DIGUE [2]

Écoulement transitoire de la surverse

Un maillage du domaine d'étude défini Figure 3 est réalisé par 14856 blocs répartis sur 16 domaines, c'est-à-dire que le calcul sera distribué sur 16 processeurs. Initialement, l'ensemble du domaine est composé d'air. On impose alors à $t=0$ s une entrée d'eau à vitesse constante sur une hauteur h_c fixée. En accord avec le critère de raffinement défini Eqs (5-7), le maillage s'enrichit et se raffine dynamiquement, suivant l'avancée de l'écoulement. Afin que le jet ne traverse pas un bloc sans avoir été raffiné, le maillage est adapté tous les $1/100$ s. Sur la Figure 4, l'évolution de l'écoulement de surverse sur la digue composée de 11 marches est représentée par quelques iso-couleurs de densité du mélange air-eau aux instants $t = 1,3,5,20$ s. Le jet initial est si rapide qu'il passe par-dessus les premières marches, puis un écoulement s'établit au-dessus des nez de marche, avant de remplir l'intérieur des marches, jusqu'à un écoulement établi autour de 20 s.

Sur la Figure 5, on observe un détail du maillage automatiquement raffiné autour de l'écoulement à $t = 1,5$ s. Le maillage dans l'air et la majorité du domaine reste grossier. Cela permet de considérer des domaines de calcul élargis, respectant au mieux les conditions aux limites, tout en économisant le nombre de cellules nécessaires à une bonne description du phénomène.

Sur la Figure 6, un zoom au bas des marches à $t = 2,5$ s permet de constater la complexité de l'écoulement. Le jet d'eau impacte le nez des marches, déformant ainsi la surface libre. Le jet est accéléré et une partie peut être détachée et projetée à l'extérieur. Par ailleurs, une partie du jet est dirigée par un écoulement rétrograde à l'intérieur de la marche, ce qui se traduit par la présence de cavités aérées au sein de l'écoulement. Lorsque l'écoulement sera établi, l'ensemble de la marche sera remplie d'eau piégée, mais avec une recirculation à faible vitesse au sein de la marche. Ce phénomène est conforme aux observations de [9] ou [14].

On constate par ailleurs que la complexité de l'écoulement ne permet pas de supposer la vitesse constante sur la hauteur d'eau, nous confortant ainsi dans la nécessité de considérer un modèle bi-phasique.

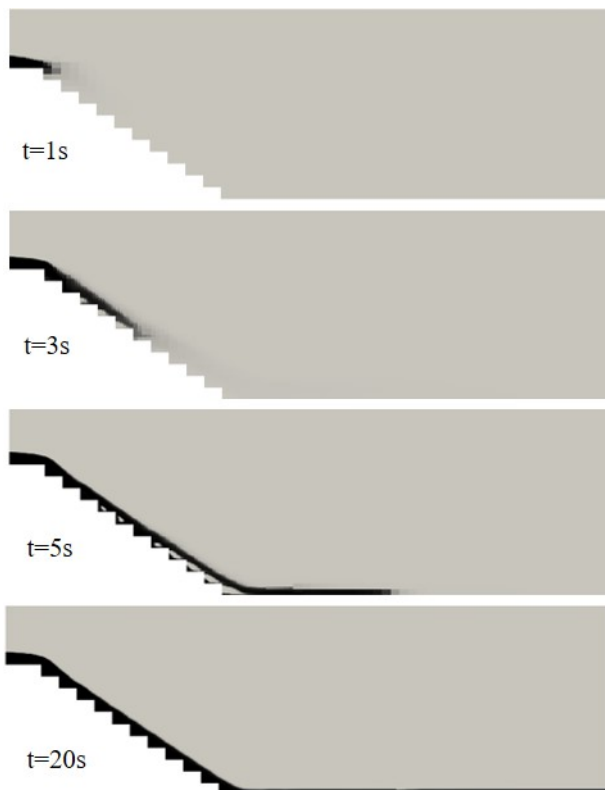


FIGURE 4 : ÉVOLUTION DE L'ÉCOULEMENT A $T = 1, 3, 5, 20$ s.

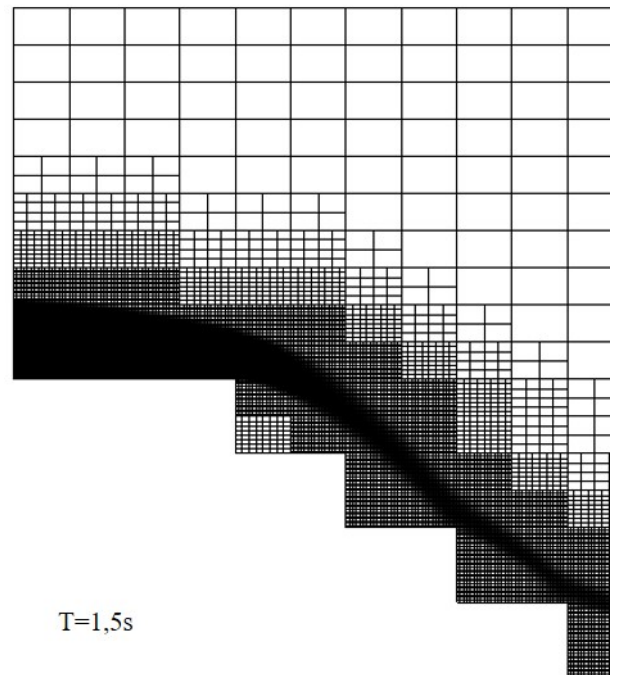


FIGURE 5 : ZOOM A $T = 1,5$ s. MAILLAGE ET DENSITE (NOIR-EAU, BLANC-AIR)

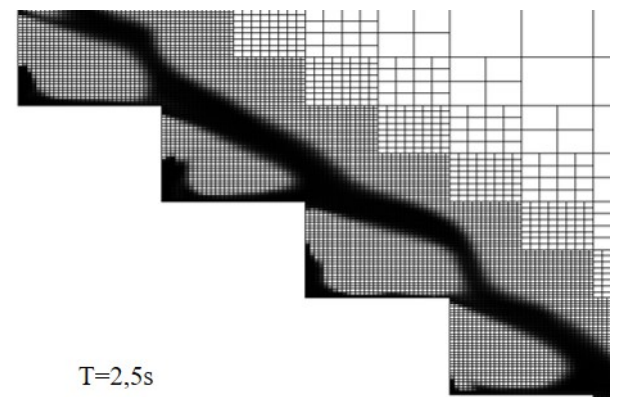


FIGURE 6 : ZOOM A $T = 2,5$ s. MAILLAGE ET DENSITE (NOIR-EAU, BLANC-AIR)

Écoulement établi de la surverse

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où l'écoulement est établi, c'est-à-dire après la phase transitoire de 20 s.

Nous allons comparer les résultats sur pente lisse ou avec 11 marches, obtenus avec notre code de Calcul BBAMR3D, quelques résultats expérimentaux issus de [2] et des simulations réalisées avec le code commercial Ansys Fluent©.

Les simulations avec Fluent ont été réalisées avec un modèle de Navier-Stokes bi-phasique et un modèle de turbulence $k-\omega$ SST.

Lorsque l'écoulement est établi, on définit la hauteur de

l'écoulement comme la distance de la paroi au point où la fraction d'eau est telle que $\varphi = 0.1$. En une section donnée, on détermine la vitesse moyenne \bar{u} , puis par conservation du débit, on définit la hauteur d'eau par la relation $h = Q / (\bar{u} l)$.

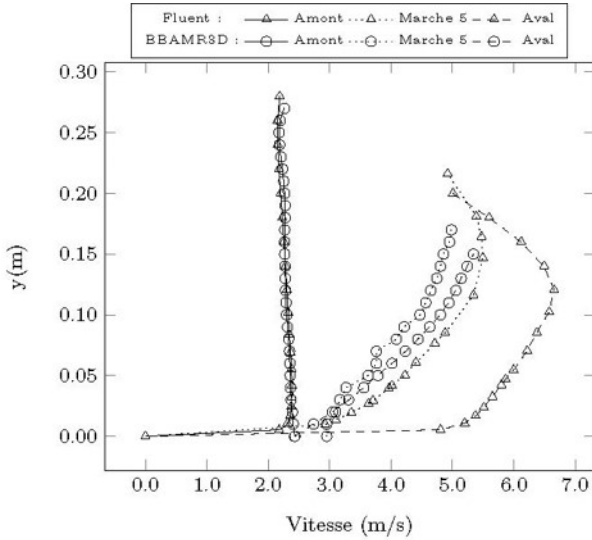


FIGURE 7 : PENTE A 11 MARCHES : PROFIL DE VITESSE EN AMONT (SECTION B), A LA 5E MARCHÉ (SECTION D) ET EN AVAL (SECTION F)

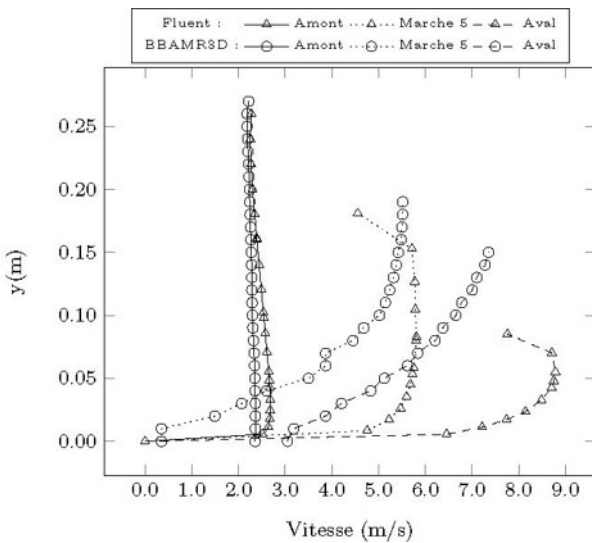


FIGURE 8 : PENTE LISSE : PROFIL DE VITESSE EN AMONT (SECTION B), A LA 5E MARCHÉ (SECTION D) ET EN AVAL (SECTION F)

Un profil de vitesse dans l'eau moyenné sur un intervalle de temps (20 s) est présenté aux section B, D, F (Figure 3), dans le cas de la pente à 11 marches (Figure 7) et dans le cas de la pente lisse (Figure 8). On observe que la vitesse calculée avec Fluent est plus élevée que celle calculée avec

BBAMR3D. Sur la pente lisse en particulier, en fonction de la prise en compte ou pas de la turbulence, le profil de vitesse est modifié.

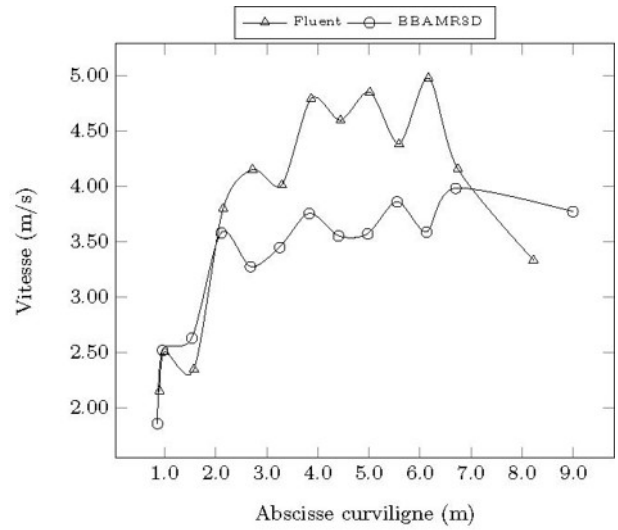


FIGURE 9 : PENTE A 11 MARCHES : VITESSE MOYENNE LE LONG DE LA PENTE

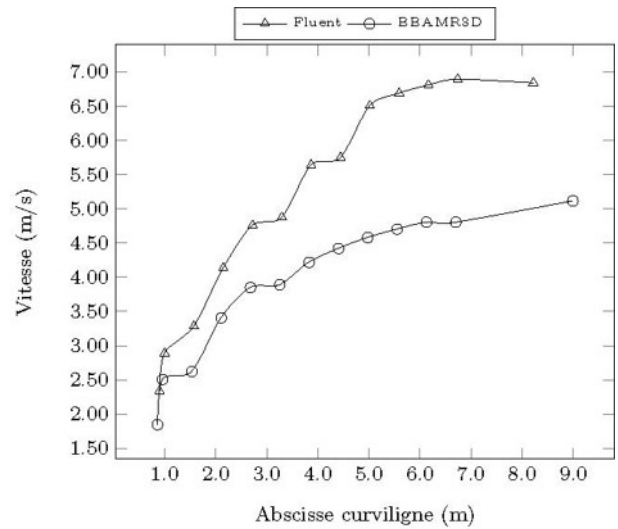


FIGURE 10 : PENTE LISSE : VITESSE MOYENNE LE LONG DE LA PENTE

La vitesse moyenne de l'écoulement le long de la pente, moyennée sur un intervalle de temps, est présentée dans le cas de la pente à 11 marches (Figure 9) et dans le cas de la pente lisse (Figure 10). On observe que la vitesse calculée avec Fluent est plus élevée que celle calculée avec BBAMR3D et plus en accord avec les résultats expérimentaux [2].

Sur les Figures 11 (pente avec 11 marches) et 12 (pente lisse), on trace les hauteurs d'eau et hauteurs d'écoulement calculées avec Fluent et BBAMR3D, ainsi que des mesures expérimentales issues de [2]. Lors de la comparaison des

valeurs, on trouve une meilleure concordance avec le modèle Eulérien.

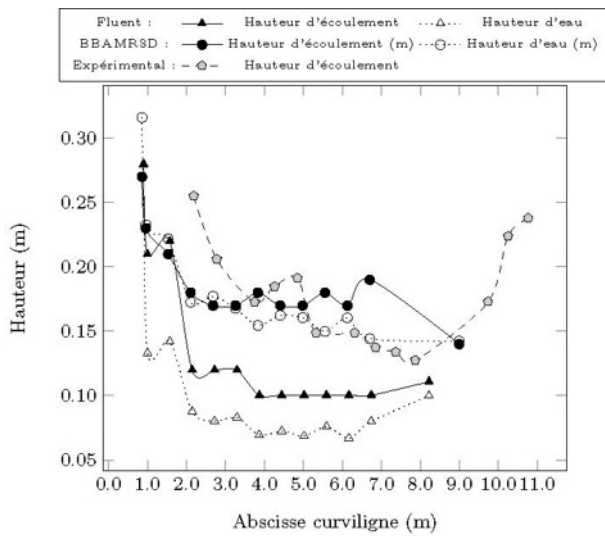


FIGURE 11 : PENTE A 11 MARCHES : HAUTEUR D'EAU ET HAUTEUR D'ÉCOULEMENT LE LONG DE LA PENTE

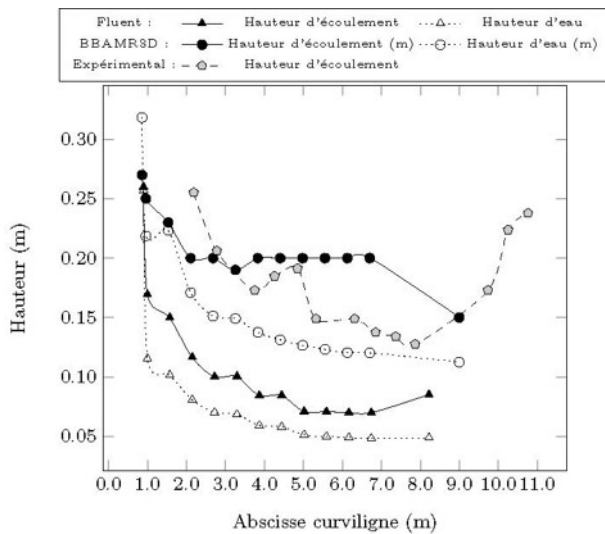


FIGURE 12 : PENTE LISSE : HAUTEUR D'EAU ET HAUTEUR D'ÉCOULEMENT LE LONG DE LA PENTE

Le calcul réalisé avec Fluent sur maillage fixe comporte environ 100 000 cellules et nécessite 24 h de calcul sur 4 cœurs pour simuler 20 s d'écoulement. Le calcul réalisé avec BBAMR3D comporte en moyenne moitié moins de cellules et nécessite un peu plus de 3 h de calcul sur 16 cœurs pour simuler 20 s d'écoulement. L'avantage numérique du modèle Eulérien avec raffinement dynamique de maillage est ainsi avéré, ce qui nous encourage à investiguer des écoulements tridimensionnels et poursuivre la validation sur de nouveaux essais de surverse.

Conclusion

Nous avons considéré le problème d'une digue en terre soumise à une surverse, phénomène assez fréquent lors de crues fluviales ou de tempêtes côtières. Pour traiter cet écoulement, un modèle diphasique est nécessaire, nous avons donc présenté un modèle bi-fluide Eulérien à faible nombre de Mach. Ce modèle bi-fluide, non visqueux et faiblement compressible est physiquement plus pertinent que des modèles de type Saint-Venant généralement utilisés et numériquement plus rapide qu'un modèle diphasique de Navier-Stokes. Le solveur volumes finis utilisé bénéficie d'un outil de raffinement dynamique de maillage par blocs sur critère de production numérique d'entropie, qui permet d'optimiser le nombre d'inconnues, et donc le temps de calcul, tout en augmentant la précision de la simulation dans les zones d'intérêt. Nous avons réalisé des simulations de surverse sur un profil lisse ou en gradins, correspondant au phénomène d'érosion observé dans le cadre d'essais de surverse. Lors de la confrontation avec quelques résultats expérimentaux et des simulations avec un modèle visqueux turbulent, nous avons constaté une sous-évaluation du champ de vitesse, en revanche, nous constatons une bonne évaluation des hauteurs d'écoulement. Durant le régime transitoire, l'écoulement semble conforme à la physique du phénomène tel qu'observé dans d'autres travaux.

Remerciements

Les auteurs remercient l'équipe du laboratoire de mécanique des sols d'Irstea Aix-en-Provence, de même que les collègues de l'entreprise LHOIST et du bureau d'études ISL qui ont permis de mener à bien ces essais de surverse.

Références

- [1] Altazin T., Ersoy M., Golay F., Sous D., Yushchenko L., (2016). *Numerical investigation of BB-AMR scheme using entropy production as refinement criterion*, Int. J. Comp. Fluid Dyn., vol. 30, 3, pp 256-271.
- [2] Bonelli S., Nicaise S., Charrier G., Chaouch N., Byron F., Grémeaux Y. (2018). *Quantifying the erosion resistance of dikes with the overflowing simulator*, 3rd International Conference on Protection against Overtopping, 6-8 June 2018, UK.
- [3] Chanson H., Toombes K., (2002). *Air-water flows down stepped chutes: turbulence and flow structure observations*, International Journal of Multiphase Flow, v28, pp1737-1761.
- [4] Ersoy M., Golay F., Yushchenko L., (2013). *Adaptive multi-scale scheme based on numerical entropy production for conservation laws*, Cent. Eur. J. Math., 11(8), pp 1392-1415.
- [5] Golay F., Helluy P., (2007). *Numerical schemes for low Mach wave breaking*, Int. J. Comp. Fluid Dyn., vol.21 n°2, pp 69-86.
- [6] Golay F., Ersoy M., Yushchenko L., D. Sous (2015). *Block-Based Adaptive Mesh Refinement scheme using numerical density of entropy production for three-dimensional two-fluid flows*, Int. J. Comp. Fluid Dyn., 29, 1, pp 67-81.
- [7] Hanson G.J., Cook K.R., Hunt, S.L., (2005). *Physical modeling of overtopping erosion and breach formation of cohesive embankments*, Transactions of the ASAE. v48(5), pp1783-1794.

- [8] Hu K., Mingham C.G., Causon D.M. (2000). *Numerical simulation of wave overtopping of coastal structures using the non-linear shallow water equations*, Coastal Engineering, v41, pp433–465.
- [9] Husain S. M., Muhammed J. R., Karunarathna H. U., Reeve D. E., (2014). *Investigation of pressure variations over stepped spillways using smooth particle hydrodynamics*, Advances in Water Resources v66, pp52–69.
- [10] Ni X., Feng W.B., (2013). *Numerical Simulation of Wave Overtopping Based on DualSPHysics*, Applied Mechanics and Materials, v405-408, pp 1463-1471.
- [11] Sambe A., Golay F., Sous D., Fraunié P., R. Marcer, (2011). *Numerical wave breaking over macro-roughness*, Eur. J. Mech. B/Fluid, v30, 4-6, pp 577-588.
- [12] Sharp J.A., McAnally W.H., (2012). *Numerical modeling of surge overtopping of a levee*, Applied Mathematical Modelling, v36, pp 1359–1370.
- [13] Zhu Y., Visser P.J., Vrijling J.K., Wang G., (2011). *Experimental investigation on breaching of embankments*, Sci China Tech Sci, v54, pp 148–155.
- [14] Zindovic B., Savic L., Kapor R., Mladenovic N., (2014). *Stepped Spillway Flow – Comparison of Numerical And Scale Models*, FME Transactions, v42, pp 218-223.